**Exercice N°1 : 7 pts (1, 1.5, (1, 1), 1, 1.5)**

1. Montrer l’équivalence suivante sans utiliser les tables de vérité : P↔Q ≡¬(P↔¬Q)
2. Soient n variables propositionnelles A1, ….., An (n≥2), on considère la formule α=A1↔….↔An.

**Montrer que la formule αn est vraie si et seulement si le nombre de variables Ai (1≤i≤n) telles que Ai=F est pair.**

1. Soient les ensembles de formules Γ={P↔Q}, Γ1={P, Q} et Γ2={¬P, ¬Q}

Montrer que : a) Si Γ1 et Γ2 sont inconsistants alors Γ est inconsistant.

b) Si Γ1 ou Γ2 sont satisfaisables alors Γ est satisfaisable.

1. Donner les règles de l’algorithme de réfutation du connecteur ↔.
2. Montrer l’équivalence de la question 1 en utilisant l’algorithme de réfutation enrichi avec les règles du connecteur ↔.

**Exercice N° 2 : 6 pts (1.5, 1.5, 1.5, 1.5)**

1. Montrerdans le langage L(¬,∧,→, ∀) les déductions suivantes **:**
   1. ¬P→¬Q∨R, ¬P→Q**├─** P∨R avec α∨β=def ¬(¬α∧¬β)
   2. **├─** ∀x (α (x) → β(x)) → (∃x α (x) → ∃x β(x))
2. Soient **(∃E**) et (**∃I**) les règles d’élimination et d’introduction pour le quantifieur existentiel **∃**

 

cond1 : x non libre dans β, ni dans les prémisses non éliminées au-dessus de β a part α(x)

On notera « ╟─ » la déduction dans le système {¬,∧,→,∃}avec **∀x α (x) =def ¬∃x ¬ α (x)**.

Notons que dans la règle ( ), l’hypothèse provisoire α(x) est éliminée.

Montrer dans le langage L(¬, ∧, →, ∃) les déductions suivantes  :

a) ∀x α (x) ╟─ α(t) (t libre pour x dans α (x) )

b) ╟─ ∃x (α (x) → β) → (∀x α (x) → β) (x non libre dans β)

**Exercice N°3 : 7 pts ((0.5, 1, 1), (1.5, 1.5, 1.5))**

Soit L(¬,∧,→,∀) le langage de 1ère ordre avec égalité contenant :

- **a, b** deux symboles de constante

- **f, g** deux symboles de fonction monaire (arité 1)

- **P** un symbole de prédicat binaire (arité 2)

On définit pour L(¬,∧,→,∀) l'interprétation I de domaine D tel que

**D = {Samedi, Dimanche, lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi}** suivante :

I(a) = Samedi, I(b) = Vendredi,

I(f) = « veille » et I(g)= « demain » Exemples : I(f)(Lundi) = Dimanche et I(g)(Lundi) = Mardi

I(P)(x, y) : « le jour x est suivi par le jour y » Exemple : (Jeudi, Vendredi) ∈ I(P) et (Mardi, Samedi) ∉ I(P)

1. Traduire les phrases suivantes dans le langage précèdent :
2. La veille de Samedi est Vendredi
3. Ce n’est pas demain la veille
4. Tous les jours sans veille sont sans lendemain (demain),
5. Etudier, pour l’interprétation I, la satisfiabilité et/ou la validité des formules suivantes :
6. ∀x ∀y (P(x, y) → g(x)=y ∧ f(y)=x)
7. ∀x P(f(x), x) → ¬∃x P(x, a)
8. ∀x ∃y P(y, x) → P(a, z)

**BON COURAGE**